MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 18.02.2012

Barem
Clasa a 11-a

1. Start 1p

a) Se ştie că $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow n\ln\frac{n+1}{n} < 1 < (n+1)\ln\frac{n+1}{n}$ 2p

adică $\frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ 1p

Deci $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n} < 0$, de unde (c_n) strict descrescător 1p

Cum $\ln 2 - \ln 1 < 1$

$\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$

………

$\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$

prin adunare obţinem că $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}-\ln(n+1) > 0$ rezultă 1p

$c_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}-\ln(n+1)+\left(\ln(n+1)-\ln n\right) > 0$ 1p

din monotonia logaritmului

deci (c_n) mărginit inferior şi descrescător, adică (c_n) convergent 1p

b) $H_{n,k} = c_{nk} - c_n + \ln(nk) - \ln n = c_{nk} - c_n + \ln k$ 1p

de unde $\lim\limits_{n\to\infty} H_{n,k} = c - c + \ln k = \ln k$ 1p

2. Start 1p

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Din teorema Cayley-Hamilton avem că

$A^2 - Tr(A)\cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2$ 1p

Cum $\det\left(A^{2012}\right) = 0 \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow A^2 = (a+d)\cdot A$ 1p

Deci $A^{2012}=(a+d)^{2011}\cdot A=(a+d)^{2011}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 1p

Rezultă

$(a+d)^{2011}\cdot a=4$, $(a+d)^{2011}\cdot b=6$, 2p

$(a+d)^{2011}\cdot c=8$, $(a+d)^{2011}\cdot d=12$

De unde $(a+d)^{2011}\cdot(a+d)=4+12=16\Rightarrow(a+d)^{2012}=16$ 1p

$(a+d)=16^{\frac{1}{2012}}\Rightarrow(a+d)^{2011}=16^{\frac{2011}{2012}}=\alpha$ 1p

Astfel $a=\dfrac{4}{\alpha}$, $b=\dfrac{6}{\alpha}$, $c=\dfrac{8}{\alpha}$, $d=\dfrac{12}{\alpha}$ şi 2p

$A=\dfrac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$

3. Start 1p

a) $(I_n-A)(A^2+A+I_n)=O_n$ implică $A^3=I_n$ şi cum 1p

$A\in M_n(R)$ rezultă $\det A=1.$ 1p

Pentru orice $k\in N^*$ avem $A^{3k}=I_n$, $A^{3k+1}=A,$ $A^{3k+2}=A^2.$ 1p

Pentru $n=3k,$ $\det(A^n+I_n)=\det(2I_n)=2^n=2^{3k}$. 2p

Pentru $n=3k+1,$ $\det(A^n+I_n)=\det(-A^2)=\det(-A)\det(A)=(-1)^n=(-1)^{3k+1}.$

Pentru $n=3k+2,$ $\det(A^n+I_n)=\det(-A)=(-1)^n=(-1)^{3k+2}$.

Prin urmare $\det(A^n+I_n)=2^{2013}$ numai pentru n=2013. 1p

b) $\det(A^2+B^2)=\det(A+iB)\cdot\det(A-iB)=\det(A+iB)\cdot\overline{\det(A+iB)}=$ 2p

$=|\det(A+iB)|^2\geq 0$ 1p

4. Start 1p

Din recurenţă rezultă a_n strict pozitiv şi crescător, deci are limită 2p

Avem că $a_{n+1}-a_1=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{2a_2}+....+\dfrac{1}{na_n}\geq$ 2p

$\geq\dfrac{1}{a_n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+....+\dfrac{1}{n}\right)$ 2p

Dacă limita sa este $l\in(0,\infty)$,

prin trecere la limită în relaţia anterioară obţinem că $l-a_1\geq\infty$, absurd, 2p

deci $l=+\infty$ 1p